Entwicklung der Funktionen in Partialproduktreihen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde genehmigt von der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

Von

J. M. ANGERVO

aus Helsinki.

Tag der Prüfung: 20. Februar 1930.
Tag der Promotion: 4. Juni 1930.

263

Referenten: Prof. Dr. Erh. Schmidt.
Prof. Dr. Bieberbach.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Erstes Kapitel. Seite

Allgemeine Partialproduktreihen und Interpolationsformeln . 5

Zweites Kapitel.

Eigenschaften der Partialproduktreihen 10

1. Die Partialproduktreihen stellen ganze Funktionen dar . . 10
2. Ueber die Aenderungen in den Nullstellen bei der Grundfunktion $u(z)$ 12
3. Ueber die Entwickelbarkeit der mit Faktoren multiplizierten oder dividierten Funktionen in Partialproduktreihen . . . 14

Drittes Kapitel.

Notwendige und hinreichende Kriterien 15

1. Eine notwendige Bedingung 15
2. Der Spezialfall: alle x_ν reell 16
3. Hinreichende Bedingungen für den Fall: alle x_ν reell . . . 17

Viertes Kapitel.

Anwendungen 23

1. Die Stirlingsche Interpolationsreihe 23
2. Satz 11 24

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547615_0048

Erstes Kapitel.

Allgemeine Partialproduktreihen und Interpolationsformeln.

Die Frage der Entwickelbarkeit der Funktionen in sog. Interpolationsreihen ist von verschiedenen Forschern behandelt worden. Insbesondere sind die Interpolationsreihen von Gauß, Stirling, Bessel und Newton genau untersucht worden. Ueber diese Reihen ist in dem Werke N. E. Nörlunds: »Vorlesungen über Differenzenrechnung« (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Band XIII, Berlin 1924) eine einheitliche Darstellung zu lesen, und das Literaturverzeichnis des Werkes zeigt die Fortschritte eines jeden Forschers auf jenen Gebieten.

Bekanntlich lauten die Reihen von Gauß

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{x+s}{2s} \Delta^{2s} F(-s) + \sum_{s=0}^{\infty} \binom{x+s}{2s+1} \Delta^{2s+1} F(-s-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{x+s-1}{2s} \Delta^{2s} F(-s) + \sum_{s=0}^{\infty} \binom{x+s}{2s+1} \Delta^{2s+1} F(-s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wobei $\Delta^n F(x)$ die n-te Differenz der Funktion $F(x)$

$$\Delta^n F(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} F(x+s)$$

und

$$\binom{x}{s} = \frac{x(x-1) \ldots [x-(s-1)]}{s!}$$

bedeutet, und die Reihen von Stirling, Bessel und Newton resp.

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} x(x^2-1^2)(x^2-2^2) \ldots (x^2-s^2)(a_s + a_s' x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \ldots \left[x^2 - \left(s-\frac{1}{2}\right)^2\right](a_s + a_s' x) \quad . \quad . \quad (4)$$

und

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \binom{x-1}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Hierbei haben wir die Bezeichnungen von Nörlund[1]) benutzt.

Die Reihen von Gauß, Stirling und Bessel konvergieren, falls überhaupt, bekanntlich in der ganzen komplexen Ebene, und stellen ganze Funktionen dar. Die Reihe von Newton dagegen ist nur in einer Halbebene konvergent, so daß es eine Konvergenzabszisse λ derart gibt, daß, wenn $x = \sigma + i\tau$ gesetzt wird, die Reihe konvergent ist für $\sigma > \lambda$, divergent für $\sigma < \lambda$. In Grenzfällen kann $\lambda = +\infty$ oder $-\infty$ sein.

Wir wollen in der folgenden Abhandlung allgemein Partialproduktreihen der Form

---

[1]) L. c. Seite 204—205.

$$a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2\mu} x^{2\mu} + a_{2\mu+2} x^{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_{2\mu+2\nu} x^{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_1 x + a_3 x^3 + \ldots a_{2\mu+1} x^{2\mu+1} + a_{2\mu+3} x^{2\mu+1} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_{2\mu+2\nu+1} x^{2\mu+1} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und

$$a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2\mu} x^{2\mu} + a_{2\mu+2} x^{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_{2\mu+2\nu} x^{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_1 x + \ldots + a_{2\mu-1} x^{2\mu-1} + a_{2\mu+1} x^{2\mu-1} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_{2\mu+2\nu-1} x^{2\mu-1} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

untersuchen, wo die Glieder Partialprodukte geraden Grades einer Funktion

$$u(x) = x^{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und Partialprodukte ungeraden Grades der Funktion $x\,u(x)$ oder $\frac{u(x)}{x}$ sind. Die Funktion $u(x)$ wollen wir Grundfunktion für die Reihen (6) und (7) nennen. In dieser Funktion sind die $\alpha_{\mu+\nu}$ komplexe Zahlen $\neq 0$, für die wir im folgenden annehmen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_{\mu+\nu}^2|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

konvergiert. Bei einer Wahl der Grundfunktion der Art (8) findet, wie wir u. a. zeigen werden, falls die Reihen überhaupt konvergent sind, eine gleichmäßige Konvergenz in jedem endlichen Gebiete der komplexen Ebene statt.

Wenn man sich auf Annäherungen beschränkt, die man durch Abbrechen der Reihen nach gewissen Gliedern erhält, so rühren diese Annäherungen von Werten der Funktion für die symmetrisch um den Anfangswert verteilten Nullstellen der Grundfunktion $u(x)$ her. Diese Annäherungen können wir als diejenigen Interpolationsformeln bezeichnen, die Polynome kleinstem möglichen Grades sind, welche für die ersten Nullstellen der Grundfunktion genau die Werte der Funktion annehmen. Dabei muß die Nullstelle 0 2μ-mal gerechnet werden und mehrfache $\alpha_{\mu+k}$ ebenfalls mehrfach.

Bei der folgenden Untersuchung teilen wir die untersuchte Funktion in eine Summe von einer geraden und einer ungeraden Funktion. Ist $F(x)$ die untersuchte, in eine Reihe (6) oder (7) entwickelbare Funktion, so setzen wir die gerade Funktion $\frac{F(x) + F(-x)}{2} = G(x)$ und die ungerade Funktion $\frac{F(x) - F(-x)}{2} = H(x)$; dann handelt es sich um die Entwicklung von $G(x)$ nach den geraden Partialprodukten von $u(x)$ und $H(x)$ nach den ungeraden Partialprodukten von $x\,u(x)$ oder $\frac{u(x)}{x}$.

Im folgenden bewegen wir uns in der komplexen Ebene z. Wir versuchen zuerst zu einer Reihenentwicklung für $G(z)$ zu kommen, und lösen zu diesem Zwecke die eindeutig bestimmte Aufgabe, eine ganze rationale Funktion (Interpolationsformel)

$$G_{2\mu+2n-2}(z) = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu} z^{2\nu} + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{2\mu+2\nu} z^{2\mu} \left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \quad (10)$$

so zu bestimmen, daß $G(z) - G_{2\mu+2n-2}(z)$ als Nullstellen 2μ-mal 0, und weiter $\pm\alpha_{\mu+1}$, $\pm\alpha_{\mu+2}$, $\ldots \pm\alpha_{\mu+n}$ hat. Hierbei nehmen wir an, daß $G(z)$ regulär im Inneren und auf dem Rande eines von einer Kurve C_{2n} begrenzten Gebietes ist, wobei C_{2n}, sich an keiner Stelle schneidend, die Punkte 0, $\pm\alpha_{\mu+1}$, $\pm\alpha_{\mu+2}$, $\ldots \pm\alpha_{\mu+n}$ umschließt. $G(z) - G_{2\mu+2n-2}(z)$ hat dann die Form

$$z^{2\mu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+n}^2}\right)\bar{R}_{2\mu+2n}(z),$$

wo $\bar{R}_{2\mu+2n}(z)$ regulär in C_{2n} und auf der Kurve C_{2n} selbst ist, so daß im Gebiete von C_{2n} also

$$\begin{aligned} G(z) = {} & a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_{2\mu} z^{2\mu} + a_{2\mu+2} z^{2\mu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots \\ & + a_{2\mu+2n-2} z^{2\mu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\left(1-\frac{z_2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+n-1}^2}\right) \\ & + z^{2\mu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+n}^2}\right)\bar{R}_{2\mu+2n}(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11) \end{aligned}$$

ist

Die Aufgabe der Bestimmung der Koeffizienten a_ν bzw. $\bar{R}_{2\mu+2n}(z)$ lösen wir nun auf die Weise, daß wir $G(z)$ mit dem zu $a_{2\nu}$ bzw. $a_{2\mu+2\nu}$ oder $\bar{R}_{2\mu+2n}(z)$ gehörigen Partialprodukt von $u(z)$ dividieren und über einige Kurven C_0 bzw. $C_{2\nu}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ integrieren, wobei angenommen wird, daß die Kurve $C_{2\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots n-1)$, die oben vorgeschriebene Kurve C_{2n} an keiner Stelle überschreitend, die Punkte 0, $\pm\alpha_{\mu+1}$, $\pm\alpha_{\mu+2}$, $\ldots \pm\alpha_{\mu+\nu}$ umschließt. Es führen die Integrationen zu folgenden Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} a_{2\nu} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{G(z)}{z^{2\nu+1}}\,dz \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots \mu-1) \\ a_{2\mu+2\nu} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2\nu+2}} \frac{G(z)}{z^{2\mu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right)(z-\alpha_{\mu+\nu+1})}\,dz \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots n-1) \end{aligned}\right\} \quad (12),$$

$$\bar{R}_{2\mu+2n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2n}} \frac{G(z)}{z^{2\mu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+n}^2}\right)}\,\frac{dz}{(z-x)} \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Aus der Form (11) geht hervor, daß es eine Reihenentwicklung der gewünschten Form für $G(z)$ dann und nur dann gibt, wenn $G(z)$ in den Gebieten der Kurven C_{2n} $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ in der Weise definiert ist, daß

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}_{2\mu+2n}(x) = 0 .$$

Wir werden später sehen, daß die Reihe, falls sie überhaupt konvergiert, eine ganze Funktion darstellt. Somit ist die Annahme der Regularität von $G(z)$ in C_{2n} berechtigt. Auch ist die Reihenentwicklung eindeutig bestimmt, denn wenn wir eine Reihe für die Funktion vorschreiben, so bekommen die Koeffizienten die Werte (12), die ja eindeutig bestimmt sind.

Für die ungerade Funktion $H(z)$ läßt sich, je nachdem es sich um die Entwicklung nach den Partialprodukten von $z\,u(z)$ oder $\frac{u(z)}{z}$ handelt, eine ganze rationale Funktion

$$H_{2\mu+2n-1}(z) = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu+1} z^{2\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{2\mu+2\nu+1} z^{2\mu+1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+\nu}^2}\right) \quad (14)$$

oder

$$\overline{H}_{2\mu+2n-3}(z) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \overline{a}_{2\nu-1} z^{2\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \overline{a}_{2\mu+2\nu-1} z^{2\mu-1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+\nu}^2}\right) \quad (15)$$

so bestimmen, daß $H(z) - H_{2\mu+2n-1}(z)$ als Nullstellen $(2\mu+1)$ mal 0 und die Punkte $\pm a_{\mu+1}, \pm a_{\mu+2} \ldots \pm a_{\mu+n}$, $\overline{H}(z) - \overline{H}_{2\mu+2n-3}(z)$ wieder $(2\mu-1)$ mal 0 und die Punkte $\pm a_{\mu+1}, \pm a_{\mu+2}, \ldots \pm a_{\mu+n}$ hat. Wieder kann angenommen werden, daß $H(z)$ regulär im Inneren und auf dem Rande des von der Kurve C_{2n} begrenzten Gebietes ist, und dann ergeben sich aus

$$H(z) = H_{2\mu+2n-1}(z) + z^{2\mu+1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+n}^2}\right)\overline{R}_{2\mu+2n+1}(z) \quad (16)$$

und

$$H(z) = \overline{H}_{2\mu+2n-3}(z) + z^{2\mu-1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+n}^2}\right)\overline{\overline{R}}_{2\mu+2n-1}(z) \quad (17)$$

mit regulären $\overline{R}_{2\mu+2n+1}(z)$ und $\overline{\overline{R}}_{2\mu+2n-1}(z)$ die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} a_{2\nu+1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{H(z)}{z^{2\nu+2}}\,dz \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots \mu-1) \\ a_{2\mu+2\nu+1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2\nu+2}} \frac{H(z)}{z^{2\mu+1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+\nu}^2}\right)(z-a_{\mu+\nu+1})}\,dz \,(\nu = 0, 1\,2 \ldots n-1) \end{aligned}\right\} \quad (18),$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{a}_{2\nu+1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{H(z)}{z^{2\nu+2}}\,dz \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots \mu-2) \\ \overline{a}_{2\mu+2\nu-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2\nu+2}} \frac{H(z)}{z^{2\mu-1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+\nu}^2}\right)(z-a_{\mu+\nu+1})}\,dz \,(\nu = 0, 1, 2 \ldots n-1) \end{aligned}\right\} \quad (19),$$

$$\overline{R}_{2\mu+2n+1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2n}} \frac{H(z)}{z^{2\mu+1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+n}^2}\right)}\,\frac{dz}{(z-x)} \quad . \quad . \quad (20)$$

und

$$\overline{\overline{R}}_{2\mu+2n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2n}} \frac{H(z)}{z^{2\mu-1}\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{a_{\mu+n}^2}\right)}\,\frac{dz}{(z-x)} \quad . \quad . \quad (21).$$

Jetzt können wir entweder

$$F(x) = a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2\mu} x^{2\mu} + a_{2\mu+2} x^{2\mu}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_{2\mu+2n-2} x^{2\mu}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+n-1}^2}\right) +$$
$$+ a_1 x + a_3 x^3 + \ldots a_{2\mu+1} x^{2\mu+1} + a_{2\mu+3} x^{2\mu+1}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_{2\mu+2n-1} x^{2\mu+1}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+n-1}^2}\right)$$
$$+ x^{2\mu}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+n}^2}\right) R_{2\mu+2n}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

oder

$$F(x) = a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2\mu} x^{2\mu} + a_{2\mu+2} x^{2\mu}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ a_{2\mu+2n-2} x^{2\mu}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+n-1}^2}\right) +$$
$$+ \bar{a}_1 x + \ldots \bar{a}_{2\mu-1} x^{2\mu-1} + \bar{a}_{2\mu+1} x^{2\mu-1}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) + \ldots$$
$$+ \bar{a}_{2\mu+2n-3} x^{2\mu-1}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+n-1}^2}\right)$$
$$+ x^{2\mu-1}\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{\mu+n}^2}\right) R_{2\mu+2n-1}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

schreiben, wo die Koeffizienten die Ausdrücke (12), (18) und (19), und die Restglieder die Ausdrücke

$$R_{2\mu+2n}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2n}} \frac{F(z)}{z^{2\mu}\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_{\mu+n}^2}\right)} \frac{dz}{(z-x)} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

und

$$R_{2\mu+2n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2n}} \frac{F(z)}{z^{2\mu-1}\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_{\mu+n}^2}\right)} \frac{dz}{(z-x)} \quad . \quad . \quad (25)$$

haben.

Aus (22) und (23) geht hervor, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F(x)$ in eine Reihe (6) bzw. (7) entwickelbar ist, wie folgt lautet:

$$\lim_{n \to \infty} R_{2\mu+2n}(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

bzw.

$$\lim_{n \to \infty} R_{2\mu+2n-1}(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Zweites Kapitel.

Eigenschaften der Partialproduktreihen.

1. Die Partialproduktreihen stellen ganze Funktionen dar.

Um Eigenschaften für die Partialproduktreihen der Art (6) und (7) herzuleiten, wollen wir von den fertigen Reihenentwicklungen

$$\left.\begin{aligned} F_1(z) &= \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu} z^{2\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu} z^{2\mu} \left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu+1} z^{2\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu+1} z^{2\mu+1} \left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

und

$$\left.\begin{aligned} F_2(z) &= \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu} z^{2\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu} z^{2\mu} \left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_{2\nu+1} z^{2\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu-1} z^{2\mu-1} \left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+2}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

ausgehen. Da

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_1(z)+F_1(-z)-2\sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu} z^{2\nu}}{2z^{2\mu}} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \\ \frac{F_1(z)-F_1(-z)-2\sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu+1} z^{2\nu+1}}{2z^{2\mu+1}} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu+1}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_2(z)+F_2(-z)-2\sum_{\nu=0}^{\mu} a_{2\nu} z^{2\nu}}{2z^{2\mu}} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \\ \frac{F_2(z)-F_2(-z)-2\sum_{\nu=1}^{\mu-1} a_{2\nu+1} z^{2\nu+1}}{2z^{2\mu-1}} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\mu+2\nu-1}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+1}^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{\mu+\nu}^2}\right) \end{aligned}\right\}$$

sind, genügt die Betrachtung von Reihen von der Form

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{x_\nu^2}\right) \quad (30)$$

mit von 0 verschiedenen x_ν. Die Grundfunktion lautet jetzt

$$u(z) = \left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{x_\nu^2}\right)\cdots \quad (31),$$

und die Annahme (9): $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|x_\nu^2|}$ konvergent.

Zunächst beweisen wir, daß die Reihe (30), falls überhaupt konvergent, eine ganze Funktion darstellt. Für die Werte $\pm x_1, \pm x_2 \ldots$ konvergiert die Reihe jedenfalls. Diese Fälle, wo die Reihe abbricht, wollen wir als triviale bei Seite lassen. Wir beweisen somit als

Satz 1: Konvergiert die Reihe (30) für einen von $\pm x_1, \pm x_2, \pm x_\nu \ldots$ verschiedenen Wert x_0, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem noch so großen abgeschlossenen Gebiete der komplexen Ebene und stellt somit eine ganze Funktion dar.

Zum Beweise setzen wir

$$\left.\begin{aligned} &a_\nu\left(1-\frac{x_0^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{x_0^2}{x_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x_0^2}{x_\nu^2}\right)=\alpha_\nu\ (\nu=0,1,2\ldots.)\\ &\frac{\left(1-\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{x_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{x_\nu^2}\right)}{\left(1-\frac{x_0^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{x_0^2}{x_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x_0^2}{x_\nu^2}\right)}=\beta_\nu\ (\nu=1,2\ldots.),\ \beta_0=1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(32)$$

und wenden die Abelsche Identität in der Form

$$\sum_{\nu=n}^{n+k}\alpha_\nu\beta_\nu=\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\left[(\beta_\nu-\beta_{\nu-1})\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\alpha_\mu\right]+\beta_n\sum_{\nu=n}^{\infty}\alpha_\nu-\beta_{n+k}\sum_{\nu=n+k+1}^{\infty}\alpha_\nu\quad\ldots\quad(33)$$

an.

Es gehöre nun z zu einem abgeschlossenen Gebiete U der komplexen Ebene. Da alle

$$\left|\left(1-\frac{x_0^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{x_0^2}{x_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x_0^2}{x_\nu^2}\right)\right|\geqq\text{eine Zahl }\alpha>0$$

und da das Produkt (31) im Gebiete U gleichmäßig konvergiert, gibt es eine endliche Zahl β der Art, daß für irgend welche z des Gebietes U alle $|\beta_\nu|\leqq\beta$. Für die Differenz $\beta_{\nu-1}-\beta_\nu$ erhalten wir aus (32) den Ausdruck

$$\beta_{\nu-1}-\beta_\nu=\beta_{\nu-1}\frac{z^2-x_0^2}{1-\frac{x_0^2}{x_\nu^2}}\cdot\frac{1}{x_\nu^2}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(34),$$

und hier läßt sich der Ausdruck $\left|\frac{z^2-x_0^2}{1-\frac{x_0^2}{x_\nu^2}}\right|$ in U für jedes $\nu\leqq$ eine Zahl γ setzen, so daß in diesem Gebiete

$$|\beta_{\nu-1}-\beta_\nu|\leqq\frac{\beta\cdot\gamma}{|x_\nu^2|}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(35)$$

ist.

Infolge der Voraussetzung, daß die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu$ konvergiert, läßt sich ein $n'=n'(\varepsilon)$ so wählen, daß $\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\alpha_\nu\right|<\varepsilon$, wenn $n\geqq n'$.

Nach (33) und (35) ist für irgend welche z aus dem Gebiete U und positive k nun, wenn $n\geqq n'$

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+k}\alpha_\nu\beta_\nu\right|<\varepsilon\left[\beta\gamma\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\frac{1}{|x_\nu^2|}+2\beta\right]$$

und dieser Ausdruck, zufolge der Annahme über die Konvergenz von $\Sigma\frac{1}{|x_\nu^2|}$, $<\varepsilon\cdot M$, womit der Beweis vollendet.

2. Ueber die Aenderungen in den Nullstellen bei der Grundfunktion $u(z)$.

Wir werden jetzt Aenderungen in den Nullstellen der Grundfunktion $u(z)$ vornehmen und darüber einige Sätze anführen. Zunächst beweisen wir als

Satz 2: Läßt sich eine Funktion $A(z)$ in eine Reihe (30) entwickeln, so läßt sie sich in eine Reihe nach den geraden Partialprodukten der Funktion

$$\left(1-\frac{z^2}{x_0^2}\right)u(z)=\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_0^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_{k+1}}\right)\ldots . \quad (36)$$

entwickeln, und zwar konvergiert diese Reihe absolut,

oder kurz:

Die Hinzufügung eines neuen Faktors zur Grundfunktion führt zu einer besser konvergierenden Reihe für die Funktion.

Um zu zeigen, daß $A(z)$ in eine Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu'\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_\nu^2}\right)+a_{k+1}'\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_0^2}\right)$$
$$+\sum_{\nu=k+2}^{\infty} a_\nu'\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_0^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_{k+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_{\nu-1}^2}\right)$$

entwickelbar ist, brauchen wir nur die Abelsche Identität (33) für $n=0$, $k=\infty$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\beta_\nu=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(\beta_\nu-\beta_{\nu-1})\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\alpha_\mu\right]+\beta_0\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

anzuwenden, die durch Substitution der früheren Ausdrücke für $\beta_{\nu-1}-\beta_\nu$, $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu$ und β_0 die Form

$$A(z)=A(x_0)+\left(1-\frac{z^2}{x_0^2}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x_\nu^2\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\alpha_\mu\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_{\nu-1}^2}\right)}{(x_\nu^2-x_0^2)\left(1-\frac{x_0^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x_0^2}{x_{\nu-1}^2}\right)} \quad . \quad . \quad (38)$$

annimmt. Diese Entwicklung ist eine Reihenentwicklung nach geraden Partialprodukten von $\left(1-\frac{z^2}{x_0^2}\right)u(z)$ und konvergiert absolut, da $\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\alpha_\mu$ Reste einer konvergenten Reihe sind und die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|x_\nu^2|}$ konvergiert. Aus (38) erhalten wir für $\nu\geqq k+1$:

$$a_\nu'=\frac{x_0^2\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\alpha_\mu}{x_\nu^2-x_0^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x_0^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x_0^2}{x_{\nu-1}^2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

und offenbar lassen sich in (38) die früheren Glieder so summieren, daß für $\nu<k+1$ die a_ν' gleich den a_ν der Reihe (30) sind, womit

$$A(z)=\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_\nu^2}\right)+\left(1-\frac{z^2}{x_0^2}\right)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}a_\nu'\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_{\nu-1}^2}\right) \quad (40)$$

die gesuchte Reihenentwicklung ist.

Ueber das Weglassen eines Faktors gilt folgender

Satz 3: Dann und nur dann läßt sich $A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right) \ldots\ldots \left(1-\frac{z^2}{x_\nu^2}\right)$ nach den geraden Partialprodukten der Funktion $\frac{u(z)}{1-\frac{z^2}{x_k^2}}$ entwickeln, die man aus $u(z)$ durch Division mit einem beliebigen der Faktoren $\left(1-\frac{z_2}{x_k^2}\right)$ erhält, wenn

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41).$$

Für den Beweis wenden wir die Integraldarstellung (13) des Restgliedes an und bezeichnen für $n > k$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{2n}} \frac{A(z)}{\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_n^2}\right)} \cdot \frac{dz}{(z-x)} = R_n(x) \ldots \quad (42),$$

und das neue Restglied

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{2n}} \frac{A(z)}{\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_{k-1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_{k+1}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_n^2}\right)} \frac{dz}{(z-x)} = R_{n-1}'(x) \quad (43).$$

Wegen der Identität $1-\frac{z^2}{x_{n+1}^2} - 1 = \frac{x_k^2}{x_{n+1}^2}\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}-1\right)$ erhalten wir

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = \frac{x_k^2}{x_{n+1}^2}\left[R_n'(x) - R_{n+1}(x)\right] \ldots\ldots \quad (44),$$

woraus sich, da $R_n(x) - R_{n+1}(x) = a_n - \frac{x^2}{x_{n+1}^2} R_{n+1}(x)$,

$$R_n'(x) = \left(1-\frac{x^2}{x_k^2}\right) R_{n+1}(x) + \frac{x_{n+1}^2 a_n}{x_k^2} \ldots\ldots \quad (45)$$

ergibt.

Nach Voraussetzung konvergiert nun $R_{n+1}(x)$ gegen 0, so daß die notwendige und hinreichende Bedingung für das Nullwerden von $R_n'(x)$ $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 a_n = 0$ ist, w. z. b. w.

Dieser Satz gilt für ein jedes k, und diese Unabhängigkeit von k läßt sich auch in folgender Form anwenden:

Korrolar: Läßt sich eine in eine Reihe (30) entwickelbare Funktion $A(z)$ nach den geraden Partialprodukten einer Grundfunktion $\frac{u(z)}{1-\frac{z^2}{x_k^2}}$ entwickeln, so läßt sie sich nach den geraden Partialprodukten irgend welcher Grundfunktionen $\frac{u(z)}{1-\frac{z^2}{x_p^2}}$ $(p \neq k)$ entwickeln.

Mit Hilfe des Satzes 2 und des obenstehenden Korrolars beweisen wir nun folgenden

Satz 4: Es läßt sich eine endliche Anzahl gerader Faktoren der Grundfunktion (31),

$$\left(1-\frac{z^2}{x_{k_1}^2}\right),\ \left(1-\frac{z^2}{x_{k_2}^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{z^2}{x_{k_\vartheta}^2}\right)$$

in beliebige andere

$$\left(1-\frac{z^2}{\alpha_1^2}\right),\ \left(1-\frac{z^2}{\alpha_2^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{z^2}{\alpha_\vartheta^2}\right)$$

umwandeln, ohne das Aenderungen in der Entwicklungsmöglichkeit der Funktionen in die betreffenden Partialproduktreihen daraus entstehen.

Zum Beweise genügt es, einen Faktor $\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)$ in einen $\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)$ umzuwandeln.

Wegen des Satzes 2 läßt sich (30) in eine Partialproduktreihe nach den geraden Partialprodukten von $\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)u(z)$ entwickeln. Nach dem Korrolar, angewandt auf die somit erhaltene Reihe, läßt sich aber aus der Grundfunktion $\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)u(z)$ der Faktor $\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)$ weglassen und die Funktion $A(z)$ somit nach den geraden Partialprodukten der Funktion $\frac{\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)u(z)}{\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)}$ entwickeln, womit die Behauptung bewiesen.

3. Ueber die Entwickelbarkeit der mit Faktoren multiplizierten oder dividierten Funktionen in Partialproduktreihen.

Aus den oben angeführten Sätzen folgen noch Schlüsse über die Entwickelbarkeit der mit einer endlichen Anzahl Faktoren zweiten Grades multiplizierten oder dividierten Funktionen in Partialproduktreihen in bezug auf dieselbe Grundfunktion.

Es zeigt sich nämlich:

Satz 5: Läßt sich $A(z)=A+\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)A_1(z)$ in eine Partialproduktreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\left(1-\frac{z^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_2^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{z^2}{x_\nu^2}\right)$ nach den geraden Partialprodukten von $u(z)$ entwickeln, so läßt sich die Funktion $A_1(z)=\frac{A(z)-A}{1-\frac{z^2}{\alpha^2}}$ auch in eine solche, und zwar absolut konvergente entwickeln.

Satz 6: Läßt sich $A(z)$ in eine Partialproduktreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\left(1-\frac{z^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_2^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{z^2}{x_\nu^2}\right)$ entwickeln, so läßt sich $A+\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)A(z)$ in eine solche dann und nur dann entwickeln, wenn

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}^2\,a_n=0.$$

Drittes Kapitel.

Notwendige und hinreichende Kriterien.

Im folgenden leiten wir einige notwendige und hinreichende Bedingungen für die Entwickelbarkeit der Funktionen in Partialproduktreihen her, und zwar Bedingungen, die die Funktionen mit der zugrunde liegenden Grundfunktion der Partialproduktreihe verbinden.

1. Eine notwendige Bedingung.

Zur Herleitung einer notwendigen Bedingung gehen wir von der Reihenentwicklung

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(1 - \frac{z^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{x_2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{z^2}{x_\nu^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

aus und nehmen an, sie sei absolut konvergent.

Für einen bestimmten Wert z betrachten wir die Zahlenfolge der absoluten Werte der Partialprodukte der Grundfunktion $u(z)$:

$$p_0(z) | = 1, \; | p_1(z) | = \left|1 - \frac{z^2}{x_1^2}\right|, \; \ldots . \; | p_\nu(z) | = \left|\left(1 - \frac{z^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{x_2^2}\right)\ldots\frac{z^2}{x_\nu^2}\right| \ldots . \quad (46)$$

und bezeichnen ihre obere Grenze mit $| p(z) |$, so daß wir

$$| p_\nu(z) | \leqq | p(z) | \; (\nu = 0, 1, 2 \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

haben. Wir schreiben jetzt

$$| A(z) | \; = \; | p(z) | \cdot \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{p_\nu(z)}{p(z)} \right| = | p(z) | \cdot \psi(z) . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

und zeigen, daß $\psi(z) \to 0$, wenn $| z | \to \infty$.

Zunächst ist wegen $\left| \frac{p_\nu(z)}{p(z)} \right| \leqq 1 \; (\nu = 0, 1, 2 \ldots .)$ und der absoluten Konvergenz von (30) für jeden Wert z

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \frac{p_\nu(z)}{p(z)} \right| < \sum_{\nu=n+1}^{\infty} | a_\nu | \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

und wir wählen ein $n = n_\varepsilon$ so groß, daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} | a_\nu | < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

wird, wenn $n \geqq n_\varepsilon$ ist. Wegen $| p_{n_\varepsilon+1}(z) | \leqq | p(z) |$ haben wir weiter

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^{n_\varepsilon} a_\nu \frac{p_\nu(z)}{p(z)} \right| &\leqq \sum_{\nu=0}^{n_\varepsilon} \left| a_\nu \frac{p_\nu(z)}{p(z)} \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n_\varepsilon} \left| a_\nu \frac{p_\nu(z)}{p_{n_\varepsilon+1}(z)} \right| \\ &= \sum_{\nu=0}^{n_\varepsilon} \left| \frac{a_\nu}{\left(1 - \frac{z^2}{x_{\nu+1}^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{x_{\nu+2}^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{x_{n_\varepsilon+1}^2}\right)} \right| \\ &\leqq \sum_{\nu=0}^{n_\varepsilon} \left| \frac{a_\nu}{\left(\left|\frac{z^2}{x_{\nu+1}^2}\right| - 1\right)\left(\left|\frac{z^2}{x_{\nu+2}^2}\right| - 1\right) \ldots \left(\left|\frac{z^2}{x_{n_\varepsilon+1}^2}\right| - 1\right)} \right| \quad . \quad . \quad . \quad (51). \end{aligned}$$

Nun kann man $|z|$ so groß wählen, etwa $|z| \geqq \varrho_\varepsilon\ (> |x_{n_\varepsilon+1}|)$, daß für alle $|z| \geqq \varrho_\varepsilon$

$$\sum_{\nu=0}^{n_\varepsilon} \frac{|a_\nu|}{\left(\left|\frac{z}{x_\nu^2+1}\right|-1\right)\left(\left|\frac{z^2}{x_\nu^2+2}\right|-1\right)\cdots\left(\left|\frac{z^2}{x_{n_\varepsilon}^2+1}\right|-1\right)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

wird. Dann sind für diese $|z|$

$$\psi(z) < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

w. z. b. w.

Es gilt somit der

Satz 7: Läßt sich eine Funktion $A(z)$ in eine absolut konvergente Partialproduktreihe (30) entwickeln, so ist

$$|A(z)| = |p(z)|\,\psi(z),$$

wo $|p(z)|$ den größten Absolutwert der Partialprodukte $p_n(z)$ der Grundfunktion $u(z)$ und $\psi(z)$ eine für $|z| \to \infty$ gegen 0 strebende positive Funktion bezeichnet.

2. Der Spezialfall: alle x_ν reell.

Unter speziellen Annahmen über die Nullstellen x_ν ($\nu = 1, 2 \ldots$) kann man sehr einfach $p(z)$ bestimmen, und es läßt sich die Gleichung (48) ungezwungen in verschiedene Gleichungen für verschiedene Winkelräume teilen. Besonders einfach werden die Formeln, wenn alle x_ν reell sind, wie aus folgendem zu ersehen ist.

Wenn alle x_ν reell sind, in welchem Falle wir die x_ν als positiv annehmen können, sieht man aus dem Ausdrucke des absoluten Wertes eines Faktors $1 - \frac{z^2}{x_\nu^2}$

$$t_\nu = \left|1 - \frac{z^2}{x_\nu^2}\right| = \sqrt{1 + \frac{r^4}{x_\nu^4} - 2\frac{r^2}{x_\nu^2}\cos 2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

(z hier $= re^{i\varphi}$ geschrieben), daß in den Winkelräumen $\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{7\pi}{4}$, wo $\cos 2\varphi \leqq 0$, ein jedes $t_\nu > 1$ und somit

ist.
$$p(z) = u(z) = \left(1 - \frac{z^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{x_2^2}\right)\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Um das Verhalten in den Winkelräumen $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$ zu untersuchen, kann man in t_ν statt x_ν eine Veränderliche α schreiben und

$$t(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{r^4}{\alpha^4} - 2\frac{r^2}{\alpha^2}\cos 2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

als eine Funktion von α betrachten. Für den Wert $\alpha_0 = \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$ ist $t(\alpha) = 1$, und es ist

$$\left.\begin{aligned} t(\alpha) &> 1 \text{ für } \alpha < \alpha_0 \\ t(\alpha) &< 1 \text{ für } \alpha > \alpha_0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

Ist n der größte Wert von ν, für welchen $x_\nu \leqq \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$, so hat $p_n(z)$ den größten absoluten Wert, welchen die Partialprodukte $p_\nu(z)$ ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$) erreichen können, d. h. es ist

$$p(z) = p_n(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Insbesondere ist auf der Bernoullischen Lemniskate $r^2 = 2x_n^2 \cos 2\varphi$

$$p(z) = p_n(z).$$

Es gilt für den Fall: alle x_ν positiv somit der

Satz 8: Läßt sich eine Funktion $A(z) = A(re^{i\varphi})$ in eine absolut konvergente Reihe (30) mit positiven x_ν ($\nu = 1, 2 \ldots$) entwickeln, so ist

$$\left.\begin{aligned} |A(z)| &= |u(z)|\,\psi(z), \quad \text{wenn } \tfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \tfrac{3\pi}{4} \text{ oder } \tfrac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \tfrac{7\pi}{4} \\ |A(z)| &= |p_n(z)|\,\psi(z), \quad \text{» } -\tfrac{\pi}{4} < \varphi < \tfrac{\pi}{4} \text{ » } \tfrac{3\pi}{4} < \varphi < \tfrac{5\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad (59),$$

wo $\psi(z)$ eine positive Funktion ist, die für $r \to \infty$ gegen 0 strebt, und n den größten Wert von ν bezeichnet, für welchen $x_\nu \leqq \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$.

Statt $\psi(z)$ kann man in (59) zwei positive begrenzte Funktionen von r, $\psi_1(r)$ und $\psi_2(r)$, die für $r \to \infty$ gegen 0 streben, einführen, und dann hat man

$$\left.\begin{aligned} |A(z)| &< |u(z)|\,\psi_1(r), \text{ wenn } \tfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \tfrac{3\pi}{4} \text{ oder } \tfrac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \tfrac{7\pi}{4} \\ |A(z)| &< |p_n(z)|\,\psi_2(r), \quad \text{» } -\tfrac{\pi}{4} < \varphi < \tfrac{\pi}{4} \text{ » } \tfrac{3\pi}{4} < \varphi < \tfrac{5\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad (60).$$

Außerdem kann noch die Wahl der Funktionen $\psi_1(r)$ und $\psi_2(r)$ so geschehen, daß sie von einer Stelle an monoton gegen 0 streben.

3. Hinreichende Bedingungen für den Fall: alle x_ν reell.

Neben den in den Sätzen 7 und 8 ausgesprochenen notwendigen Konvergenzbedingungen wollen wir hinreichende Bedingungen derselben Art herleiten, und dabei wollen wir den Fall des Satzes 8 ins Auge fassen, wo alle x_ν positiv sind.

Es schließen sich diese Untersuchungen an die genügende Verkleinerung des Restgliedes

$$R_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2n}} \frac{A(z)}{\left(1 - \frac{z^2}{x_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{x_2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{x_n^2}\right)} \frac{dz}{z - x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

an.

Bei der Wahl der Integrationskurve C_{2n} findet eine mit n gegen ∞ wachsende positive Funktion $\delta(n)$ Anwendung, für welche jedoch $[\delta(n)]^2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2}$ beschränkt bleibt, so daß für alle n eine Ungleichung

$$[\delta(n)]^2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2} \leqq \text{eine Zahl } M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

besteht. Im folgenden werden wir $\delta(n)$ noch näher beschränken.

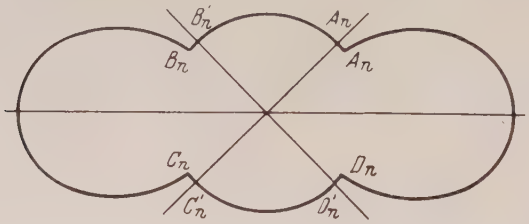
Für $|z| = \delta(n)$ liegt nun

$$\left|\left(1 - \frac{z^2}{x_{n+1}^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{x_{n+2}^2}\right) \cdots\right| \leqq \left(1 + \frac{\delta^2(n)}{x_{n+1}^2}\right)\left(1 + \frac{\delta^2(n)}{x_{n+2}^2}\right) \cdots < e^{\delta^2(n) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2}} < e^M \quad (62)$$

unter einer endlichen Grenze, welche Werte man n auch geben will.

Wir schreiten jetzt dazu, das Restglied (42) zu untersuchen, und wählen als Integrationskurve die in Fig. 1 dargestellte Kurve. In dieser Figur sind die Bogen $A_n B_n$ und $C_n D_n$ Bogen des Kreises $r = \delta(n)$ und die Bogen $D_n A_n$ und $B_n C_n$ Bogen der Lemniskate $r^2 = 2 x_n^2 \cos 2\varphi$. Die Punkte A_n', B_n', C_n' und D_n' sind Schnittpunkte des Kreises und der Halbstrahlen $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ und $\frac{7\pi}{4}$. Die Koordinaten des im ersten Quadranten befindlichen Schnittpunktes A_n des Kreises und der Lemniskate seien r_n, φ_n, und es ist

$$\left.\begin{array}{l} r_n = \delta(n) \\ \cos 2\varphi_n = \dfrac{\delta^2(n)}{2 x_n^2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$



Figur 1.

Wir schätzen das Integral (42) längs der Bogen $A_n B_n$ und $D_n A_n$, was aus Symmetriegründen hinreichend ist. Um Berührungspunkte mit dem Satze 8 zu erhalten, nehmen wir an, daß

$$\left.\begin{array}{l} |A(z)| < \psi_1(r)\,|u(z)|, \quad \text{wenn} \quad \dfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \dfrac{3\pi}{4} \text{ oder } \dfrac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \dfrac{7\pi}{4} \\ |A(z)| < \psi_2(r)\,|p_m(z)|, \quad \text{»} \quad -\dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{4} \quad \text{»} \quad \dfrac{3\pi}{4} < \varphi < \dfrac{5\pi}{4} \end{array}\right\} \quad . \quad (64),$$

wo m den größten Wert von ν bedeutet, für welchen $x_\nu \leqq \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$. $\psi_1(r)$ sei eine positive begrenzte für $r \to \infty$ gegen 0 strebende Funktion, und über $\psi_2(r)$ sei hier angenommen, daß sie begrenzt ist und monoton gegen 0 abnimmt, wenn von einem Werte an $r \to \infty$ wächst.

Auf dem Bogen $A_n B_n$ haben wir

$$\left|\int_{A_n B_n}\right| \leqq \int_{A_n B_n} \frac{|A(z)|}{|p_n(z)|} \frac{ds}{|z-x|} < \int_{A_n' B_n'} \psi_1[\delta(n)] \left|\left(1-\frac{z^2}{x_{n+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_{n+2}^2}\right)\ldots\right| \frac{ds}{|z-x|}$$

$$+ \int_{A_n A_n'} \psi_2[\delta(n)]\, \Pi(z) \frac{ds}{|z-x|} + \int_{B_n' B_n} \psi_2[\delta(n)]\, \Pi(z) \frac{ds}{|z-x|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65),$$

wobei $\Pi(z)$ in den Punkten A_n und $B_n = 1$, und

$$\left|\left(1-\frac{z^2}{x_{n+1}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x_{n+2}^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{x_{n+\nu}^2}\right)\right|$$

mit um so größeren ν ist, je näher z dem Punkte A_n' oder B_n' liegt. Zufolge (62) ist für

$$r = \delta(n), \quad \Pi(z) \quad \text{sowie} \quad \left|\left(1 - \frac{z^2}{x_{n+1}^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{x_{n+2}^2}\right) \ldots\right| < e^M$$

und somit ist

$$\left|\int_{A_n B_n}\right| < \psi_1[\delta(n)]\, e^M \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\delta(n)}{\delta(n) - |x|} + \psi_2[\delta(n)]\, e^M \frac{2\,\widehat{A_n A_n'}}{\delta(n) - |x|}$$

$$= \frac{\delta(n)}{\delta(n) - |x|} \cdot e^M \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \psi_1[\delta(n)] + \frac{2\,\widehat{A_n A_n'}}{\delta(n)} \psi_2[\delta(n)] \right\} \quad \ldots \quad (66),$$

welcher Ausdruck wegen unserer Voraussetzungen über $\psi_1(r)$ und $\psi_2(r)$ gegen 0 strebt, wenn $n \to \infty$, also $\delta(n) \to \infty$.

Auf dem Bogen $D_n A_n$ ist

$$\left|\int_{D_n A_n}\right| < \int_{D_n A_n} \psi_2(r) \frac{ds}{|z - x|} < \frac{\delta(n)}{\delta(n) - |x|} \int_{D_n A_n} \psi_2(r) \frac{ds}{r}$$

$$< \frac{2\,\delta(n)}{\delta(n) - |x|}\, \psi_2[\delta(n)] \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} \quad \ldots \quad (67),$$

da $\psi_2(r)$ monoton abnehmend angenommen wurde und auf der Lemniskate $\frac{ds}{r} = \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}$ ist. Das letzte Integral schreiben wir in der Form

$$\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\delta^2(n)}{2 x_n^2}}^{1} \frac{dx}{x} + K_n = \log \frac{x_n}{\delta(n)} + K_n' \quad \ldots \quad (68),$$

wo K_n und K_n' für noch so große n unter einer endlichen Grenze liegen. Somit strebt $\int_{D_n A_n}$ für $n \to \infty$ gegen den Wert 0, wenn

$$\psi_2[\delta(n)] \log \frac{x_n}{\delta(n)} \to 0 \quad \ldots \quad (69)$$

gilt. Jetzt handelt es sich also um die Möglichkeit, $\delta(n)$ so zu wählen, daß diese Bedingung noch erfüllt wird.

Wir nehmen zuerst an, daß $x_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2}$ für alle n unter einer endlichen Grenze liegt, was sicher der Fall ist, wenn $\liminf_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ist. In diesem Falle können wir einfach

$$\delta(n) = x_n \quad \ldots \quad (70)$$

setzen, und dann ist dieses von $\log \frac{x_n}{\delta(n)}$ herrührende Glied sogar $= 0$, und somit die Bedingungen (64) hinreichend für die Entwickelbarkeit von $A(z)$ in eine Reihe (30) mit positiven x_ν.

Wir nehmen dann an, daß $x_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2} \to \infty$, wenn $n \to \infty$. In diesem Falle ist $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{\delta(n)} = \infty$, und wir müssen die Funktion $\psi_2(r)$ weiter beschränken, um in jedem Falle das Bestehen der Bedingung (69) sicherstellen zu können. Zunächst zeigen wir, daß wir immer eine der Bedingung $\delta_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2} \leqq M$ genügende monoton wachsende

Zahlenfolge δ_n $(n = 1, 2 \ldots .)$ so wählen können, daß auch die Zahlenfolge $\frac{x_n}{\delta_n}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ monoton gegen ∞ wächst.

Zu diesem Zwecke wählen wir zuerst eine beliebige der Bedingung (61) genügende monoton wachsende Zahlenfolge δ_n $(n = 1, 2 \ldots)$, (z. B. $\delta_n = \sqrt{\frac{M}{\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2}}}$, in welchem Falle $\frac{x_n}{\delta_n}$ und $x_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ gleichzeitig monoton oder nicht monoton gegen ∞ streben). Für diese δ_n bilden wir die Zahlenfolge

$$\frac{x_1}{\delta_1} = q_1, \quad \frac{x_2}{\delta_2} = q_2, \ldots \quad \frac{x_n}{\delta_n} = q_n, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71).$$

Es wachse nun diese Zahlenfolge $q_1, q_2 \ldots q_n \ldots$ monoton bis zu einem dem Werte $n = k_1$ entsprechenden Maximumwert $q_{k_1} = \varrho_1$, nach welchem wenigstens ein nachfolgender Wert $q_{k_1+1} < \varrho_1$ ist; sei ferner der dem Werte $n = k_2 (> k_1)$ entsprechende Maximumwert $q_{k_2} = \varrho_2$ der erste Maximumwert nach dem Werte ϱ_1, welcher $> \varrho_1$ ist, $\varrho_3 = q_{k_3}$ der erste Maximumwert nach dem Werte ϱ_2, der $> \varrho_2$ ist, usw. [1]). Es seien

$$q_{k_1+1}, q_{k_1+2}, \ldots q_{k_1+\nu_1} \leqq \varrho_1, \text{ aber } \varrho_1 \leqq q_{k_1+\nu_1+1} \leqq q_{k_1+\nu_1+2} \leqq \ldots \leqq q_{k_2} = \varrho_2 \quad (72).$$

Dann wählen wir statt $\delta_{k_1+1}, \delta_{k_1+2} \ldots \delta_{k_1+\nu_1}$ neue, $\delta'_{k_1+1}, \delta'_{k_1+2} \ldots \delta'_{k_1+\nu_1}$ so, daß $\frac{x_{k_1+\lambda}}{\delta'_{k_1+\lambda}} = \varrho_1$, d. i.

$$\delta'_{k_1+\lambda} = \frac{x_{k_1+\lambda}}{\varrho_1} \quad (\lambda = 1, 2 \ldots \nu_1) \ldots \ldots \quad (73).$$

Dann ist a)

$$\delta'_{k_1+\lambda} \leqq \delta_{k_1+\lambda} \quad (\lambda = 1, 2 \ldots \nu_1) \ldots \ldots \quad (74),$$

denn es ist

$$\delta'_{k_1+\lambda} = \frac{x_{k_1+\lambda}}{\varrho_1} \cdot \frac{x_{k_1+\lambda}}{q_{k_1+\lambda}} = \delta_{k_1+\lambda},$$

somit sicher $\delta_n'^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2} \leqq M \quad (n = k_1 + 1, \ldots k_1 + 2, \ldots k_1 + \nu_1)$.

Zweitens ist b)

$$\delta_{k_1} \leqq \delta'_{k_1+1} \leqq \delta'_{k_1+2} \leqq \ldots \leqq \delta'_{k_1+\nu_1} \leqq \delta_{k_1+\nu_1} \leqq \delta_{k_1+\nu_1+1} \ldots \quad (75),$$

der neue Zahlenfolgeteil $\delta_{k_1}, \delta'_{k_1+1}, \delta'_{k_1+2} \ldots \delta'_{k_1+\nu_1}, \delta_{k_1+\nu_1+1}$ somit monoton wachsend. Drittens war ja unsere Wahl von δ_n' derart, daß der Zahlenfolgeteil

$$\frac{x_{k_1}}{\delta_{k_1}}, \frac{x_{k_1+1}}{\delta'_{k_1+1}}, \frac{x_{k_1+2}}{\delta'_{k_1+2}} \ldots \frac{x_{k_1+\nu_1}}{\delta'_{k_1+\nu_1}}, \frac{x_{k_1+\nu_1+1}}{\delta_{k_1+\nu_1+1}} \ldots \frac{x_{k_2}}{\delta_{k_2}} \ldots \ldots \quad (76)$$

monoton wächst. Ebenso verfahren wir zwischen den Indizes k_2 und k_3, usw.

Wir wollen jetzt annehmen, diese technischen Rechnungsarbeiten seien durchgeführt, und die vorgeschriebene, der Bedingung (61) genügende monoton wachsende Zahlenfolge δ_n $(n = 1, 2 \ldots)$ sei derart, daß auch die Zahlenfolge (71) monoton gegen ∞ wächst.

Es sei nun δ_{n_ν} $(\nu = 1, 2 \ldots)$ eine aus δ_n $(n = 1, 2 \ldots)$ entnommene im engeren Sinne monoton wachsende Zahlenfolge, für welche $\frac{x_{n_1}}{\delta_{n_1}} > 1$ und also

$$\delta_{n_1} < \delta_{n_2} < \cdots < \delta_{n_\nu} < \cdots \ldots \ldots \ldots \quad (77).$$

[1]) Wenn z. B. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2}$ folgendermaßen gewählt ist: $\sum_1^{n_1} \frac{1}{x_\nu^2} = \sum_1^{n_1} \frac{1}{\nu^2}$; $\sum_{n_1+1}^{n_2} \frac{1}{x_\nu^2} = \sum_{4n_1}^{n_2+3n_1-1} \frac{1}{\nu^2}$, usw., und $s(n) = x_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2}$ gesetzt wird, so ist sicher, wenn $n_1 \geqq 6$, $S(n_1 - 1) > S(n_1)$, usw. für passende $n_2, n_3 \ldots$.

Dann setzen wir für $0 \leqq r \leqq \delta_{n_1}$, übrigens für $\delta_{n_{\nu-1}} < r \leqq \delta_{n_\nu}$ $(\nu = 2, 3 \ldots)$

$$\psi_2(r) = \frac{\psi_0(r)}{\log \frac{x_{n_\nu}}{\delta_{n_\nu}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78),$$

und nehmen an, daß $\psi_0(r)$ für $r \to \infty$ gegen 0 strebt. Dann ist die Bedingung (69) erfüllt.

Zuletzt wollen wir noch zeigen, daß die bei (64) gemachte Hilfsannahme, daß von einem Werte r an $\psi_2(r)$ monoton gegen 0 abnimmt, immer zur Erfüllung gebracht werden kann. Um eine monoton abnehmende Funktion $\psi_2(r)$ zu bilden, haben wir nämlich, da $\log \frac{x_{n_\nu}}{\delta_{n_\nu}}$ monoton wächst, in (78) an der Stelle von $\psi_0(r)$, wenn nicht schon von einem Werte r an $\psi_0(r)$ monoton abnimmt, nur eine neue monoton abnehmende Funktion $\overline{\psi_0}(r) \geqq \psi_0(r)$ einzuführen, die wir folgenderweise bilden.

Wir bezeichnen mit l_1 den größten Wert von $\psi_0(r)$ für $0 \leqq r \leqq \delta_{n_1}$, mit l_2 den den größten Wert von $\psi_0(r)$ für $\delta_{n_1} < r \leqq \delta_{n_2}$ und allgemein mit l_ν den größten Wert von $\psi_0(r)$ für $\delta_{n_{\nu-1}} < r \leqq \delta_{n_\nu}$. Wegen unserer Voraussetzung über $\psi_0(r)$ ist $\lim_{\nu \to \infty} l_\nu = 0$. Wir wollen zuerst eine monoton abnehmende Zahlenfolge l_ν $(\nu = 1, 2 \ldots)$ bilden. Wenn schon von einem Werte ν' an die Zahlenfolge monoton abnimmt, wählen wir statt l_ν $(\nu = 1, 2 \ldots \nu' - 1)$ beliebig neue Werte $l_\nu' \geqq l_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots \nu' - 1)$, so daß jedoch $l_1' > l_2' > \ldots > l_{\nu'-1}' > l_{\nu'}$. Dann setzen wir $\psi_0(r) = l_1'$ für $0 \leqq r \leqq \delta_{n_1}$, $\overline{\psi_0}(r) = l_\nu'$ für $\delta_{n_{\nu-1}} < r \leqq \delta_{n_\nu}$ $(\nu = 2, 3 \ldots \nu' - 1)$, $\overline{\psi_0}(r) = l_\nu$ für $\delta_{n_{\nu-1}} < r < \delta_{n_\nu}$ $(\nu = \nu', \nu' + 1 \ldots)$. Wenn die Zahlenfolge l_ν $(\nu = 1, 2 \ldots)$ von keinem Werte an monoton abnimmt, bezeichnen wir mit ϱ_1 den größten Wert der l_ν $(\nu = 1, 2 \ldots)$ und mit ν_1 den größten Index ν, für welchen $l_\nu = \varrho_1$. Ferner bezeichnen wir mit ϱ_2 den größten Wert der l_ν für $\nu > \nu_1$ und mit ν_2 den größten Index ν, für welchen $l_\nu = \varrho_2$, usw. Dann setzen wir $\overline{\psi_0}(r) = \varrho_1$ für $0 \leqq r \leqq \delta_{n_{\nu_1}}$, $\overline{\psi_0}(r) = \varrho_2$ für $\delta_{n_{\nu_1}} < r \leqq \delta_{n_{\nu_2}}$ usw. Wenn wir diese $\overline{\psi_0}(r)$ statt $\psi_0(r)$ in (78) einführen, so darf die so entstandene monoton abnehmende Funktion $\overline{\psi_2}(r) = \frac{\overline{\psi_0}(r)}{\log \frac{x_{n_\nu}}{\delta_{n_\nu}}}$ an der Stelle von $\psi_2(r)$ in die zweite Ungleichung (64) eingeführt werden.

Dasselbe ist mit dieser Hilfsannahme der Fall, wenn wir den früheren Fall vor uns haben, wo alle $x_n^2 \sum_{n+1}^{\infty}{}' \frac{1}{x_\nu^2} < M$.

Es gelten somit die Sätze:

Satz 9a: Hinreichend für die Entwickelbarkeit einer ganzen geraden Funktion $A(z)$ in eine Reihe (30), wo alle x_ν positiv sind und $x_n^2 \sum_{n+1}^{\infty}{}' \frac{1}{x_\nu^2}$ für alle n unter einer endlichen Grenze liegt, ist daß

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)} & |A(z)| < \psi_1(r)\,|u(z)|, & \text{wenn} \quad \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4} \text{ oder } \frac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{7\pi}{4} \\ \text{b)} & |A(z)| < \psi_2(r)\,|p_n(z)|, & \text{»} \quad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} \quad \text{»} \quad \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \end{array}\right\} \quad (79),$$

wo $\psi_1(r)$ und $\psi_2(r)$ begrenzte positive Funktionen sind, die $\to 0$, wenn $r \to \infty$ und n den größten Wert von ν bezeichnet, für welchen $x_\nu \leqq \frac{r}{\sqrt{2 \cos 2\varphi}}$.

Satz 9b: Hinreichend für die Entwickelbarkeit einer ganzen geraden Funktion $A(z)$ in eine Reihe (30), wo alle x_ν positiv sind und $x_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu^2} \to \infty$ für $n \to \infty$, ist daß

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & |A(z)| < \psi_1(r)\,|u(z)|, \text{ wenn } \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4} \text{ oder } \frac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{7\pi}{4} \\ \text{b)} & |A(z)| < \psi_2(r)\,|p_n(z)|, \quad \text{» } -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} \text{ » } \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \end{array}\right\} \quad (80),$$

wo $\psi_1(r)$ und n dieselbe Bedeutung wie im Satz 9a haben und $\psi_2(r)$ den Ausdruck (78) bezeichnet, wo $\psi_0(r) \to 0$, wenn $r \to \infty$.

Viertes Kapitel.

Anwendungen.

1. Die Stirlingsche Interpolationsreihe.

Die Stirlingsche Interpolationsreihe, die wie folgt lautet:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + a_\nu' z)\, z \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{(\nu-1)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81),$$

hat Nörlund ausführlich in »Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton«[1]) behandelt. Bei dieser Reihe haben wir als Grundfunktion

$$u(z) = z^2 \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \ldots = \frac{z}{\pi} \sin \pi z \quad . \quad . \quad (82).$$

Für $\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4}$ oder $\frac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{7\pi}{4}$ ist somit

$$| p(z) | = | u(z) | = C_1(z)\, r e^{\pi r |\sin \varphi|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83),$$

wo $C_1(z)$ eine begrenzte für $r \neq 0$ von 0 verschiedene positive Funktion ist. Für $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$ erhält man, wenn man mit Nörlund[2]) für $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$

$$\psi(\varphi) = \cos \varphi \log \left(\sqrt{\cos 2\varphi} + \sqrt{2} \cos \varphi\right)^2 + \sin \varphi \cdot 2 \overline{\arcsin \left(\sqrt{2} \cdot \sin \varphi\right)} \quad . \quad (84)$$

setzt und $\psi(\varphi + \pi) = \psi(\varphi)$ schreibt, den Ausdruck

$$| p(z) | = | p_n(z) | = C_2(z)\, r \cdot e^{r \psi(\varphi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85),$$

wo $C_2(z)$ eine begrenzte, nur für die Nullstellen von $p_n(z)$ verschwindende positive Funktion bedeutet.

Mit Hilfe der Formeln (83) und (85) leitet man für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Stirlingsche Interpolationsreihe das folgende, hier für eine gerade Funktion formulierte Nörlundsche Konvergenzkriterium her[3]): Hinreichend für die Entwickelbarkeit der geraden Funktion $A(z)$ in eine Reihe

$$a_0 + a_1 z^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^2 \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{(\nu-1)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & |A(z)| < r^\beta e^{\pi r |\sin \varphi|}, \text{ wenn } \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4} \text{ oder } \frac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{7\pi}{4} \\ \text{b)} & |A(z)| < r^\beta e^{r \psi(\varphi)}, \quad \text{» } -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} \text{ » } \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \end{array}\right\} \quad (87),$$

wo $\beta < 1$.

---

[1]) Annales scientifiques de l'école normale supérieure 3 (39) (1922).
[2]) l. c. Seite 356
[3]) l. c. Seite 363.

Wir wollen indessen den Exponenten β auf 1 reduzieren, indem wir dann in den Ausdrücken (87) Faktoren hinzufügen, die langsamer als jede $\frac{1}{r^\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ für $r \to \infty$ gegen 0 streben dürfen. In der Tat haben wir dafür $x_n = n - 1$ und $\delta_n = \sqrt{n-1}$ in den Satz 9b einzusetzen, und es ergibt sich zufolge (83) und (85) der

Satz 10: Hinreichend für die Entwickelbarkeit der ganzen geraden Funktion $A(z)$ in eine Reihe (86) ist:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ |A(z)| < \psi_1(r)\, r\, e^{\pi r |\sin\varphi|}, \text{ wenn } \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4} \text{ oder } \frac{5\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{7\pi}{4} \\ &\text{b)}\ |A(z)| < \psi_0(r) \frac{r}{\log(1+r)} e^{r\psi(\varphi)}, \text{ wenn } -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad (88),$$

wo $\psi_1(r)$ und $\psi_0(r)$ positive begrenzte Funktionen sind, die $\to 0$, wenn $r \to \infty$.

2. Satz 11.

Wenn wir von der Funktion die Entwickelbarkeit in eine Stirlingsche Interpolationsreihe annehmen, läßt sich folgendes Ergebnis einfach beweisen:

Satz 11: Läßt sich $f(z)$ in eine Stirlingsche Interpolationsreihe (81) entwickeln, und strebt die Differenz $[f(n+1) + f(-n-1)] - [f(n) + f(-n)]$ für $n \to \infty$ gegen den Wert 0, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{-n-1/2}^{n+1/2} f(z)\, dz - \sum_{\nu=-n}^{n} f(\nu) \right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89).$$

Beweis: Wir setzen zuerst die geraden Funktionen $\frac{1}{2}[f(z) + f(-z)] = f_1(z)$, $f_1(z-\nu) + f_1(z+\nu) = \varphi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$ und schreiben

$$\left.\begin{aligned} \int_{-n-1/2}^{n+1/2} f(z)\, dz &= \int_{-n-1/2}^{n+1/2} f_1(z)\, dz = \sum_{\nu=-n}^{n} \int_{\nu-1/2}^{\nu+1/2} f_1(z)\, dz \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} f_1(z)\, dz + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_\nu(z)\, dz \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (90).$$

Aus der Entwickelbarkeit von $f_1(z)$ in eine Reihe (86) folgt nun, daß alle $\varphi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$ in diese Reihe entwickelbar sind. Zu diesem Zwecke haben wir für $\nu = 1$ zu zeigen, daß

$$R_n[\varphi_1(x)] = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_{2n-2}} \frac{\varphi_1(z)}{z^2\left(1-\frac{z^2}{1}\right)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{(n-1)^2}\right)} \frac{dz}{(z-x)} \quad . \quad . \quad (91)$$

für $n \to \infty$ gegen den Wert 0 strebt. Wir bilden daher aus

$$f_1(z) = a_0 + a_1 z^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^2 \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{(\nu-1)^2}\right) \quad . \quad . \quad (92)$$

den Ausdruck für $\varphi_1(z) = f_1(z-1) + f_1(z+1)$,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z) &= 2a_0 + 2a_1(z^2+1) - 2a_2 z^2(z^2+5) \\ &\quad - 2\sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu+1} z^2 \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{(\nu-1)^2}\right) \frac{(z^2+\nu^2+3\nu+1)}{\nu^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (93),$$

und daraus bekommen wir

$$R_n[\varphi_1(x)] = 2\left(a_n + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu+1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n+\nu)^2}\right)\left[\frac{x^2+(n+\nu)^2+3(n+\nu)+1}{x^2-(n+\nu)^2}\right]\right) \quad (94).$$

Dieser Ausdruck strebt jedoch mit

$$R_n[f_1(x)] = a_n + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu+1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n+\nu)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

für $n \to \infty$ gegen den Wert 0, wie z. B. mit Hilfe der Abelschen Identität (37) zu ersehen ist.

Derselbe Beweis gilt für $r = 2$, da wir $\varphi_2(z) = [\varphi_1(z-1) + \varphi_1(z+1)] - 2 f_1(z)$ haben, und für $r > 2$ ist $\varphi_\nu(z) = [\varphi_{\nu-1}(z-1) + \varphi_{\nu-1}(z+1)] - \varphi_{\nu-2}(z)$.

Bedeuten nun die $\Delta_k y_{\nu+\delta}$ $(k = 1, 2 \ldots)$, $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$, $\delta = +\frac{1}{2}, 0$, die obere Differenzen der Funktionswerte $y_\nu = f_1(\nu)$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ nach folgendem Schema

$$\left.\begin{array}{lllll} y_{\nu+2} & \Delta y_{\nu+\frac{3}{2}} & & & \\ y_{\nu+1} & \Delta y_{\nu+\frac{1}{2}} & \Delta_2 y_{\nu+1} & & \\ y_\nu & \Delta y_{\nu-\frac{1}{2}} & \Delta_2 y_\nu & \Delta_3 y_{\nu+\frac{1}{2}} & \Delta_4 y_\nu \\ y_{\nu-1} & \Delta y_{\nu-\frac{3}{2}} & \Delta_2 y_{\nu-1} & \Delta_3 y_{\nu-\frac{1}{2}} & \\ y_{\nu-2} & & & & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (96),$$

so lautet die Stirlingsche Interpolationsformel[1]) für die gerade Funktion $f_1(z)$:

$$f_1(0) + \Delta_2 y_0 \frac{z^2}{2!} + \Delta_4 y_0 \frac{z^2(z^2-1)}{4!} + \ldots + \Delta_{2k} y_0 \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)\ldots[z^2-(k-1)^2]}{(2k)!},$$

und da $f_1(z)$ in eine Stirlingsche Interpolationsreihe entwickelbar, haben wir genau

$$f_1(z) = f_1(0) + \Delta_2 y_0 \frac{z^2}{2!} + \Delta_4 y_0 \frac{z^2(z^2-1)}{4!} + \ldots + \Delta_{2k} y_0 \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)\ldots[z^2-(k-1)^2]}{(2k)!} + \ldots \quad (97).$$

Für die Funktion $\varphi_\nu(z)$ haben wir $\Delta_{2k}\varphi_\nu(0) = \Delta_{2k} y_\nu + \Delta_{2k} y_{-\nu} = 2\Delta_{2k} y_\nu$, und somit ist

$$\varphi_\nu(z) = 2\left\{f_1(\nu) + \Delta_2 y_\nu \frac{z^2}{2!} + \Delta_4 y_\nu \frac{z^2(z^2-1)}{4!} + \ldots + \Delta_{2k} y_\nu \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)\ldots[z^2-(k-1)^2]}{(2k)!} + \ldots\right\} \quad (98).$$

Die Reihen (97) und (98) konvergieren gleichmäßig, und somit haben wir

$$\int_{-1/2}^{1/2} f_1(z)\,dz = f_1(0) + \frac{1}{24}\Delta_2 y_0 - \frac{17}{5760}\Delta_4 y_0 + \ldots + 2 I_{2k}\Delta_{2k} y_0 + \ldots \quad (99),$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \varphi_\nu(z)\,dz = 2\left\{f_1(\nu) + \frac{1}{24}\Delta_2 y_\nu - \frac{17}{5760}\Delta_4 y_\nu + \ldots + 2 I_{2k}\Delta_{2k} y_\nu + \ldots\right\} \quad (100),$$

wo

$$I_{2k} = \int_0^{1/2} \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)\ldots[z^2-(k-1)^2]}{(2k)!}\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101).$$

---

[1]) Die »Interpolationsformel (I)« bei Runge-König: »Vorlesungen über numerisches Rechnen« (Berlin 1924), 35.

Mithin ist nach (90), da $\Delta_{2k} y_\nu = \Delta_{2k} y_{-\nu}$:

$$\int_{-n-1/2}^{n+1/2} f(z)\,dz = \sum_{\nu=-n}^{n} f_1(\nu) + \frac{1}{24}\sum_{\nu=-n}^{n} \Delta_2 y_\nu - \frac{17}{5760}\sum_{\nu=-n}^{n} \Delta_4 y_\nu + \ldots + 2 I_{2k} \sum_{\nu=-n}^{n} \Delta_{2k} y_\nu + \ldots \quad (102),$$

oder da $\sum_{\nu=-n}^{n} \Delta_{2k} y_\nu = \Delta_{2k-1} y_{n+1/2} - \Delta_{2k-1} y_{-n-1/2} = 2\,\Delta_{2k-1} y_{n+1/2}$ und $\sum_{\nu=-n}^{n} f_1(\nu) = \sum_{\nu=-n}^{n} f(\nu)$;

$$\int_{-n-1/2}^{n+1/2} f(z)\,dz - \sum_{\nu=-n}^{n} f(\nu) = \frac{1}{12}\Delta y_{n+1/2} - \frac{17}{2880}\Delta_3 y_{n+1/2} + \ldots + 4\, I_{2k}\, \Delta_{2k-1} y_{n+1/2} + \ldots \quad (103).$$

Nach Voraussetzung strebt jetzt

$$[f(n+1) + f(-n-1)] - [f(n) + f(-n)] = 2\,[f_1(n+1) - f_1(n)] = 2\,\Delta y_{n+1/2}$$

für $n \to \infty$ gegen den Wert 0. Bedeutet M den größten Wert von $|\Delta y_{\nu+1/2}|$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$, so folgt aus der Formel

$$\Delta_{2k-1} y_{n+1/2} = \Delta y_{n+k-1/2} - \binom{2k-2}{1} \Delta y_{n+k-3/2} + \binom{2k-2}{2} \Delta y_{n+k-5/2} - + \ldots + \Delta y_{n-k+3/2} \quad \ldots \quad (104)$$

die für alle n gültige Abschätzung:

$$|\Delta_{2k-1} y_{n+1/2}| < M \cdot 2^{2k-2} \quad \ldots \quad (105).$$

Das Integral I_{2k} schätzen wir folgendermaßen ab: Wie aus (101) leicht zu ersehen, ist $|I_{2k}| < \frac{1}{24}\frac{[k-1)!]^2}{(2k)!}$ und somit

$$k^{3/2}\, 2^{2k}\, |I_{2k}| < \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{2 \cdot 4 \ldots (2k-2)}{3 \cdot 5 \ldots (2k-1)} \cdot \sqrt{2k} \quad \ldots \quad (106),$$

und dieser Ausdruck strebt mit $k \to \infty$ gegen den Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{24}$. Mithin ist das allgemeine Glied der Reihe (103)

$$|4\, I_{2k}\, \Delta_{2k-1} y_{n+1/2}| < \frac{M'}{k^{3/2}} \quad \ldots \quad (107),$$

wo M' eine positive Zahl bedeutet.

Jetzt wird

$$\left| \sum_{\nu=k}^{\infty} 4\, I_{2\nu}\, \Delta_{2\nu-1} y_{n+1/2} \right| < M' \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu^{3/2}},$$

ein für allemal n klein genug, wenn k groß genug ist. Es sei

$$\left| \sum_{\nu=k}^{\infty} 4\, I_{2\nu}\, \Delta_{2\nu-1} y_{n+1/2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wenn } k \geqq k'.$$

Nunmehr ist noch n so groß zu wählen, daß für das feste k'

$$\left| \sum_{\nu=1}^{k'-1} 4\, I_{2\nu}\, \Delta_{2\nu-1} y_{n+1/2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, was wegen $\lim_{n \to \infty} \Delta y_{n+1/2} = 0$ möglich ist. Ist dies der Fall, wenn $n \geqq n'$, dann ist $\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} 4\, I_{2\nu}\, \Delta_{2\nu-1} y_{n+1/2} \right| < \varepsilon$, d. h.

$$\left| \int_{-n-1/2}^{n+1/2} f(z)\,dz - \sum_{\nu=-n}^{n} f(\nu) \right| < \varepsilon \quad \ldots \quad (108),$$

w. z. b. w.

Lebenslauf.

Ich, Juho Mauri Angervo, wurde am 29. Juli 1904 in Helsinki geboren. Meine Eltern sind: Sanitätsoberst a. D. der finnischen Armee, Dr. med. Vilho Angervo, und seine Frau Anna Maria, geb. Freiherrin v. Kothen. Am 28. Mai 1920 in Mikkeli Student geworden, habe ich mich September 1920 an der Universität und dem Musik-Konservatorium zu Helsinki immatrikuliert. In den Jahren 1920 bis 1923 habe ich die obligatorischen Prüfungen und die Spezialprüfungen der Komposition des Musik-Konservatoriums bestanden. Am 1. Mai 1924 habe ich an der Universität das Cand. phil.-Examen gemacht mit den Zeugnissen: in Mathematik Laudatur, in Astronomie Laudatur, in Physik Laudatur, in Chemie Approbatur. Am 20. Mai 1924 ist mir die Mag. phil. Würde erteilt geworden. Nach der Beteiligung an einer erdmagnetischen Forschungsreise in die Inselgruppen von Ahvenanmaa und Merenkurkku habe ich auf Grund der Verordnung des Ministeriums der Landwirtschaft vom 26. August 1924 das Amt des zweiten Assistenten der Meteorologischen Zentralanstalt des finnischen Staates vom 1. September 1924 bis 1. Oktober 1928 versehen. Im Lehrjahre 1926 — 1927 bin ich als Assistent der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Helsinki tätig gewesen. Im Sommer 1926 habe ich in Wien studiert und am 7. November 1928 mich an der Universität Berlin immatrikuliert.

Während meiner Berliner Studienzeit habe ich die Freude gehabt, Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren Bartels, Baur, Czerny, Defant, Dessoir, Feigl, v. Ficker, Hettner, Hopf, Knoch, Ladenburg, Planck, Rieffert, Robitsch, Sachs, Schering, Erh. Schmidt und Schur anhören zu dürfen.

Meinem hochgeehrten Referenten, Se. Magn. Rektor der Friedr.-Wilh.-Universität zu Berlin, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Erh. Schmidt, der mir bei der Bearbeitung meiner Dissertation viele nützliche Ratschläge gegeben hat, fühle ich mich an dieser Stelle zu ganz besonderem Dank verpflichtet.

Der Verfasser.

Frühere Veröffentlichungen:

»Matematiikan kehityksen suuntaviivoista« (»Valo« 69. nide, Porvoo 1927).

»Einige Formeln für die numerische Vorausbestimmung der Lage und Tiefe der Hoch- und Tiefdruckzentra« (Ann. Acad. Scient. Fenn. Ser. A, Tom. XXVIII Nr. 10, 45 Seiten, Helsinki 1928).

Druck von A. W. Schade G. m. b. H., Berlin N 65.